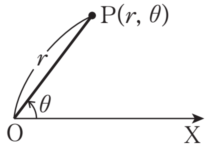
PART2 極方程式

要点整理と公式

要点 ① 極方程式

平面上のある曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いた式で表されるとき，その方程式を曲線の「極方程式」という。

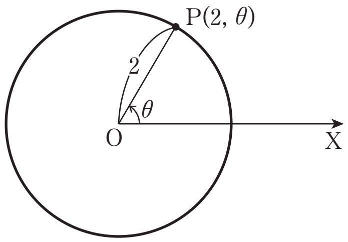


(ex) 極方程式 $r=2$ が表す曲線

曲線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$r=2$，θ は任意の値

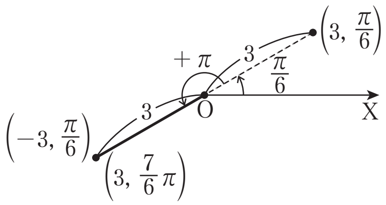
よって，この極方程式は，極 O を中心とする半径 2 の円を表す。



極方程式において，$r<0$ のときの極座標 $(r,\ \theta)$ は，極座標が（ r , θ 　　）である点を表すと考える。

たとえば，極座標 $\left(-3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ は，点 $\left(\quad,\ \dfrac{\pi}{6}\qquad\right)$，

すなわち点 $\left(3,\ \dfrac{7}{6}\pi\right)$ を表す。



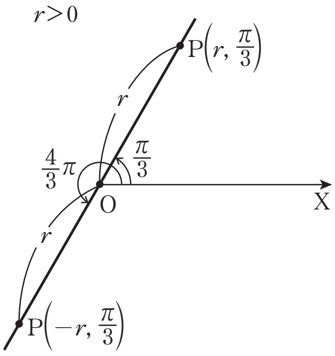
(ex) 極方程式 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ が表す曲線

曲線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

r は任意の値，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって，この極方程式は，点 O を通り，

始線 OX と $\dfrac{\pi}{3}$ の角をなす直線を表す。



要点② いろいろな図形の極方程式

ある曲線が，極方程式

$r=f(\theta)$ や $F(r,\ \theta)=0$

で表されるときの図形の方程式について考える。

(ex) 極方程式 $r=2\cos\theta$ が表す曲線

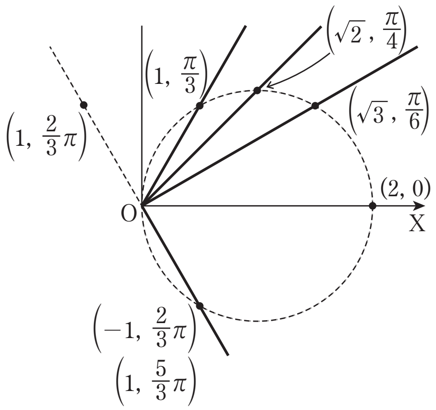
曲線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき，それぞれ

$r=2,\ \sqrt{3},\ \sqrt{2},\ 1,\ 0$

また，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき $r=-1$

極座標 $\left(-1,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$ は，点 $\left(1,\ \dfrac{5}{3}\pi\right)$ を表す。



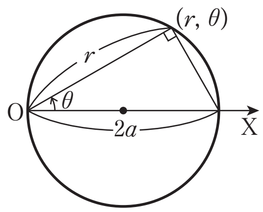
いくつかの点を具体的にとることで，曲線の概形を描くことができる。

要点③ 極方程式と直交座標

一般に，中心が $(a,\ 0)$，半径が a の円を表す極方程式は

$r=2a\cos\theta$

である。このことは右図からわかる。



極方程式 $r=2a\cos\theta$ を，直交座標の $x,\ y$ の方程式で表す。

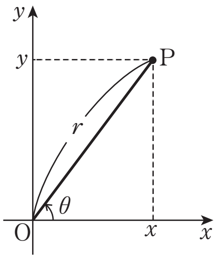
$r=2a\cos\theta$ より $r^2=2ar\cos\theta$

曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$r^2=$ 　　　　，$r\cos\theta=$ 　　より

$x^2+y^2=2ax$

よって　$(x-a)^2+y^2=a^2$



双曲線 $x^2-y^2=9$ を極方程式で表す。

曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=$ 　　　　，$y=$ 　　　　より

$(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2=9$　　　　$r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=9$

よって　$r^2\cos 2\theta=9$

2 (1) 極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，直線 OA に垂直な直線 ℓ の極方程式を求めよ。

(2) 次の極方程式は，どのような図形を表すか。

(i) $r=4$　　　(ii) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

(iii) $r=5\cos\theta$　　　(iv) $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=3$

(3)(i) 極方程式 $r=\sin\theta$ を直交座標の x，y の方程式で表せ。

(ii) 楕円 $x^2+5y^2=1$ を極方程式で表せ。

Point Pickup

極方程式

曲線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とし，$r=f(\theta)$ や $F(r,\ \theta)=0$ などの r，θ に関する方程式を作る。条件を図示し，「　　　　　　」に注目するとよい。

円・直線の極方程式

中心が極 O，半径が a の円 … $r=a$

中心が $(a,\ 0)$，半径が a の円 … $r=2a\cos\theta$

極 O を通り，始線と α の角をなす直線 … $\theta=\alpha$

点 $\mathrm{A}(a,\ \alpha)$ を通り，OA に垂直な直線 … $r\cos(\theta-\alpha)=a$ $(a>0)$

第 4 講 PART2 確認問題

1 極座標が $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ である点 A を通り，直線 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。［ア］

① $r=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　② $r\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=4$

③ $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=4$　④ $r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=4$

2 極方程式 $r=6$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。［イ］

① 中心が極 O，半径が 3 の円

② 中心が極 O，半径が 6 の円

③ 極 O を通り，半径が 3 の円

④ 極 O を通り，半径が 6 の円

3 極方程式 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。［ウ］

① 中心が極 O，半径が $\dfrac{\pi}{4}$ の円

② 極 O を通り，半径が $\dfrac{\pi}{4}$ の円

③ 極 O を通り，始線 OX に垂直な直線

④ 極 O を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線

4 極方程式 $r=6\cos\theta$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。 エ

① 中心が極 O，半径が 6 の円

② 中心が (3，0)，半径が 3 の円

③ 中心が (3，0)，半径が 6 の円

④ 中心が (6，0)，半径が 6 の円

5 極方程式 $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。 オ

① 極 O を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線

② 極座標が (2，0) である点を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線

③ 極座標が $\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線

④ 極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線

6 極方程式 $r=\sin\theta+\cos\theta$ の表す曲線を，直交座標に関する方程式で表せ。答えは次の①～④のうちから選べ。

カ

① $x+y=1$　② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+y^2+x+y=0$　④ $x^2+y^2-x-y=0$

7 楕円 $2x^2+y^2=1$ を極方程式で表せ。

答えは次の①～④のうちから選べ。 キ

① $r^2=1+\cos^2\theta$　② $r^2(1+\sin^2\theta)=1$

③ $r^2(1+\cos^2\theta)=1$　④ $r^2(2-\cos^2\theta)=1$

[MEMO]

PART2 極方程式

2 (1) 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$ である点Aを通り，直線OAに垂直な直線 ℓ の極方程式を求めよ。

(2) 次の極方程式は，どのような図形を表すか。

(i) $r=4$　　(ii) $\theta=\frac{\pi}{6}$

(iii) $r=5\cos\theta$　　(iv) $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=3$

(3)(i) 極方程式 $r=\sin\theta$ を直交座標の x，y の方程式で表せ。

(ii) 楕円 $x^2+5y^2=1$ を極方程式で表せ。

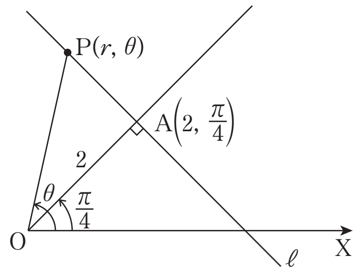
[解答]

(1) 直線 ℓ 上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$\mathrm{OP}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{OA}$$

よって，求める極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$$



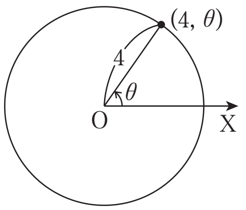
(2)(i) 中心が極O，半径が4の円

(ii) 極Oを通り，始線OXと $\frac{\pi}{6}$ の角をなす直線

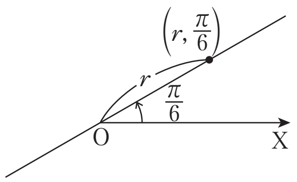
(iii) 中心が $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，半径が $\frac{5}{2}$ の円

(iv) 極座標が $\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点Aを通り，線分OAに垂直な直線

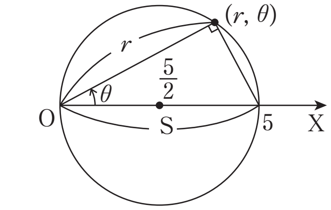
(i)



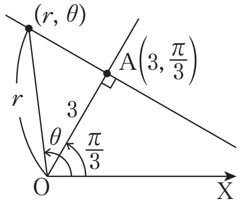
(ii)



(iii)



(iv)



(3)(i)　$r=\sin\theta$ より　$r^2=r\sin\theta$

曲線上の点 $P(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$とすると，$r^2=x^2+y^2$，$r\sin\theta=y$ より

$x^2+y^2=y$　　　よって　$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ii)　曲線上の点 $P(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ より

$(r\cos\theta)^2+5(r\sin\theta)^2=1$

$r^2(\cos^2\theta+5\sin^2\theta)=1$　　　よって $r^2(1+4\sin^2\theta)=1$

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

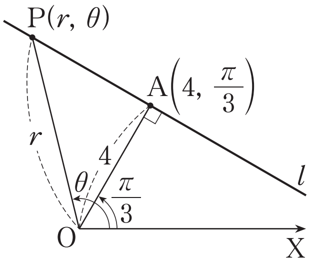
[解説]

直線 l 上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$$\mathrm{OP}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{OA}$$ [A]

よって，求める極方程式は，

$$\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=4}$$



[A]　点 A$(a,\ \alpha)$ を通り，OA に垂直な直線の極方程式は，
$r\cos(\theta-\alpha)=a\ \ (a>0)$

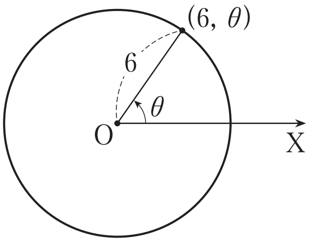
2

[正解] イ：②

[解説]

極方程式 $r=6$ の表す曲線は，

中心が極 O，半径が 6 の円 [B]



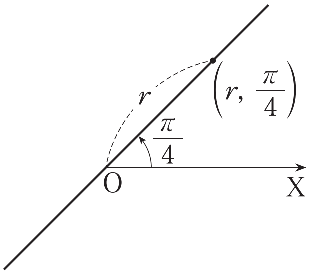
[B]　$r=6$ は，極からの距離が一定値 6 であることを表す。

3　[正解] ウ：④

[解説]

極方程式 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の表す曲線は，

極 O を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線 [C]



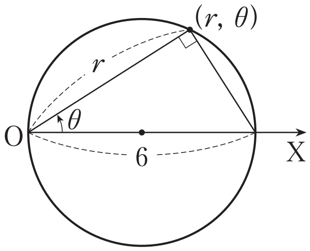
[C]　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ は，曲線上の点 P に対し，OP と始線とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であることを表す。

4　[正解] エ：②

[解説]

極方程式 $r=6\cos\theta$ の表す曲線は，

中心が $(3,\ 0)$，半径が 3 の円 [D]



[D]　中心が $(a,\ 0)$，半径が a の円を表す極方程式は，
　$r=2a\cos\theta$

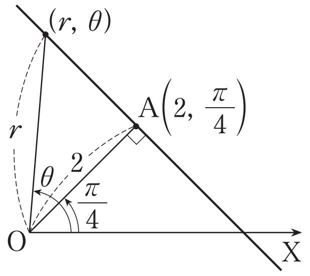
5 【正解】オ：④

[解説]

極方程式 $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$ の表す曲線は，

極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，

線分 OA に垂直な直線 [E]



[E] 点 $A(a,\ \alpha)$ を通り，OA に垂直な直線の極方程式は，
$r\cos(\theta-\alpha)=a\ \ (a>0)$

6 【正解】カ：④

[解説]

$r=\sin\theta+\cos\theta$ より，

$$r^2=r\sin\theta+r\cos\theta$$ [F]

[F] 両辺に r をかける。

曲線上の点 $P(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$r^2=x^2+y^2,\quad r\sin\theta=y,\quad r\cos\theta=x$$

より，$x^2+y^2=y+x$ [G]

$$\boldsymbol{x^2+y^2-x-y=0}$$

[G] 方程式に $r^2=x^2+y^2$，$r\sin\theta=y$，$r\cos\theta=x$ を代入する。

7

[正解] キ：③

[解説]

曲線上の点 P$(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

これを $2x^2+y^2=1$ に代入すると，

$$2(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=1$$

$$r^2\left(2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=1$$

$$r^2\left(2\cos^2\theta+1-\cos^2\theta\right)=1 \quad \text{[H]}$$

$$\boldsymbol{r^2\left(1+\cos^2\theta\right)=1}$$

[H]　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，$\sin\theta$ を $\cos\theta$ で表す。